

Das geometrische Quadrat

Genauigkeitsanalysen zu einem bedeutenden Messgerät der Renaissance

Der Förderkreis Vermessungstechnisches Museum und der Arbeitskreis Geschichte des Vermessungswesens führen als Emblem das Bild eines Landmessers beim Messvorgang mit dem geometrischen Quadrat (Bild 1). Es ist das einzige Messgerät der Renaissance, mit dem die Länge einer Strecke indirekt mit den Gerätemaßen und dem Ablesemaß an der Geräteskala bestimmt wird. Ob das Gerät bereits im Altertum zum Einsatz kam, lässt sich nicht mit Sicherheit feststellen. Ptolemaios

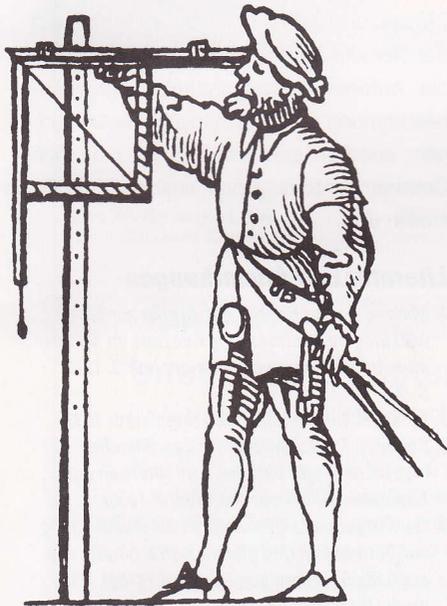


Bild 1: Geometrisches Quadrat mit Stativ nach Rivius (1547)

und die Araber überliefern mit dem sich auf dem Astrolab befindenden Schattenquadrat ein Geräteteil, das in Kleinausführung in etwa dem geometrischen Quadrat entspricht (1). Als selbständiges Gerät ist es erstmals bei Gerbert von Aurillac (um 1000) nachgewiesen (3). Im Schrifttum der Renaissance ist es fester Bestandteil und vielfach im Zusammenhang mit den Stabmessgeräten (z. B. Jakobsstab) und dem geometrischen Quadranten dargestellt und beschrieben (2, 3, 4).

Gerätebeschreibung

Originale und Nachbauten des geometrischen Quadrats finden sich in einigen Museen und Schausammlungen; darunter

auch besonders künstlerisch gestaltete Geräte aus Metall, wie sie Schißler für den Kurfürsten von Sachsen (1569) und für Kaiser Rudolf II. (1579) fertigte (5). Die Quellenanalyse zeigt für die Geräte folgende Konstruktionsmerkmale und Daten:

- **Material:** In der Regel maßhaltiges Holz. Vereinzelt künstlerische Konstruktionen aus Eisen oder Edelmetall.
- **Form:** Überwiegend quadratischer Rahmen, seltener eine quadratische Platte.
- **Größe:** Divergiert zwischen 0,50 m und 1,00 m. Metallgeräte zeigen wegen des Gewichts kleine Größen.
- **Visiervorrichtung:** Meist eine Alhidade, aber auch einfache Lineale und Fäden (3).
- **Skala:** Eine oder zwei Randskalen. Die Teilungen zeigen bis zu 1200 Striche. Apian führt das Dezimalsystem mit bis zu 1000 Strichen ein (2). Transversalen zur Erleichterung der Ablesung enthalten die Geräte nicht (3).
- **Stativ:** Die meisten Messvorgänge sind ohne Stativ dargestellt. Eine exakte Vertikal- oder Horizontalmessung bedingt die Anbringung des Quadrats an oder auf einem Stativ (Bild 1). In der Literatur sind die Geräte wegen der besseren Darstellung allgemein in der Vertikalen abgebildet (Bilder 2, 3 und 4).
- **Sonderkonstruktionen:** Sie enthalten einen Viertelkreis für die Winkelmessung (Bild 4). Mit dem Lot senkrecht gestellt, ist das Gerät zudem als Nivellier geeignet (Bild 1) (3).
- **Das geometrische Quadrat ist auch ein Stabmessgerät.** Die geschlossene Quadratform hat im Vergleich mit den klassischen Stabmessgeräten den Vorteil, dass Verschiebungen der Rechtwinkel weniger leicht auftreten (3). Im Gegensatz zur indirekten Bestimmung einer

Bild 2: Messvorgang mit dem geometrischen Quadrat nach Rivius (1547) und Schißler (1569)

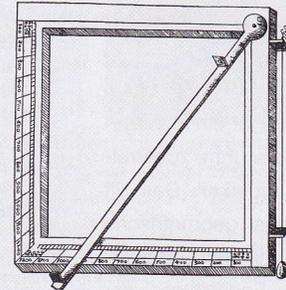
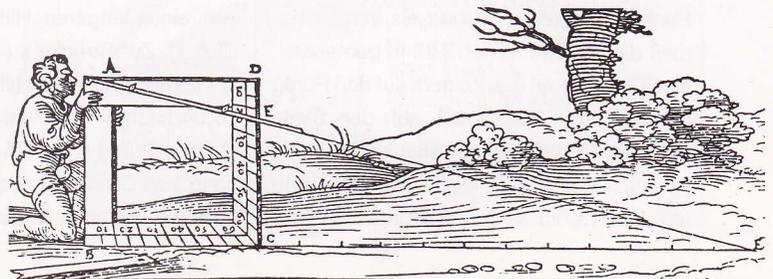


Bild 3: Geometrisches Quadrat nach Gerbert (um 1000)

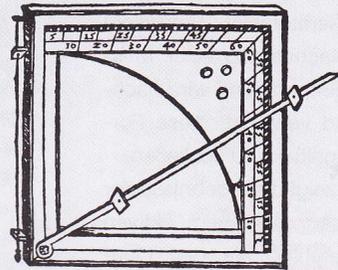


Bild 4: Geometrisches Quadrat mit Innenkreis und Winkelteilung nach Rivius (1547)

Streckenlänge ist bei der Stabmessung stets eine Strecke zu messen (vgl. Hilfsbasis Bild 7).

Der Messvorgang

Die Darstellung und Beschreibung des Messvorgangs lässt bei den Autoren der Renaissance keine wesentlichen Unterschiede erkennen (4). Bild 2 zeigt den Vorgang zur Ermittlung einer horizontalen Streckenlänge nach Schißler (5). Die Aufgabe ist nicht praxisbezogen. Stativ und Lot fehlen. Das Gelände wird vom Gerät bis zum Zielpunkt als eben vorausgesetzt. Zur Verdeutlichung der Mess- und Rechenvorgänge reicht die Darstellung aus. Der Beobachter visiert mit der Alhidade den Zielpunkt an. Ablesung der Strecke DE auf der Geräteskala. Das Dreieck ABF ist dem Dreieck ADE ähnlich. Die gesuchte Strecke

BF rechnet sich aus $BF : BA = AD : DE$. Der Mess- und Rechenvorgang ist einfach. Damit wäre das geometrische Quadrat „das Messgerät“ der Renaissance, wenn es bestimmten Genauigkeitsanforderungen genügen würde.

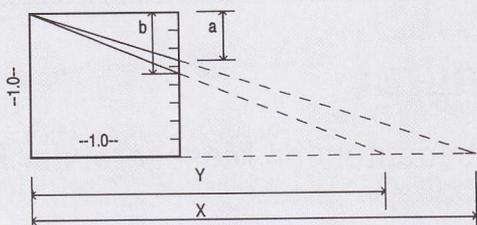
Genauigkeitsanalysen

Das Kriterium für ein Messgerät ist die mit ihm zu erreichende Genauigkeit. Das gilt auch für das geometrische Quadrat, für dessen Genauigkeit das Schrifttum der Renaissance keine Angaben aufweist. Durch Ansatz fiktiver Gerätefehler (Analysen) und Nachvollzug einer Messung (Experiment) wird nachfolgend versucht, diese Forschungslücke zu schließen.

Bild 5 zeigt die Ergebnisse der Analysen mit einem fiktiven Gerätefehler. Mit den Quadratseiten (Länge = 1 m) rechnen sich für die Streckenlängen x (von 10 m bis 500 m) die Ablesemaße a , die für die Untersuchung mit einem fiktiven Gerätefehler von +1 mm belastet sind ($b = a + 1$ mm). Mit den Maßen b und den Quadratseitenlängen rechnen

sich die Längen für y . Der Vergleich der Längen x und y zeigt deutlich die Fehleranfälligkeit des Geräts und lässt erkennen, dass mit dem geometrischen Quadrat nur eine Streckenmessung bis zu 10 m zu vertreten ist.

Im Gegensatz zu den Analysen mit einem fiktiven Gerätefehler sind beim praktischen Messvorgang Geräte-, Ables- und Visierfehler gegeben, die sich aufheben oder summieren können. Für eine Genauigkeitsaussage wurde mit einem Gerätenachbau (Quadratseite = 0,50 m) eine Messung durchgeführt (Bild 6). Das geometrische Quadrat wird mit seiner Grundseite auf den Punkt B eingefluchtet und als Vergleichsmaß die Strecke AB = 13,20 m gemessen. Nach Einvisieren des Zeigers auf den Punkt B zeigt das Ablesemaß auf der Skala 0,018 m. Damit rechnet sich die Strecke AB mit 13,89 m. Die kurze Strecke wurde um 0,69 m zu lang bestimmt. Mit der



bei x	a (ger.)	b	y (ger.)	Fehler
m	m	m	m	m
10,0	0,100	0,101	9,901	-0,099
50,0	0,020	0,021	47,620	-2,380
100,0	0,010	0,011	90,909	-9,901
200,0	0,005	0,006	166,667	-33,333
500,0	0,002	0,003	333,333	-166,667

Bild 5: Skizze und Tabelle zur Genauigkeitsanalyse unter Ansatz eines fiktiven Gerätefehlers für die Strecken von 10 m bis 500 m

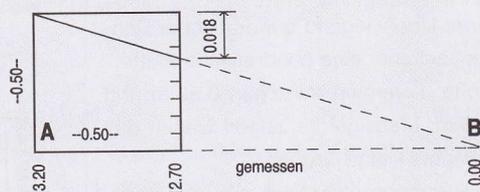


Bild 6: Durchführung der Messung mit einem Gerätenachbau. Sie ist mit Stativ – je nach Topographie – in der Vertikalen und Horizontalen möglich

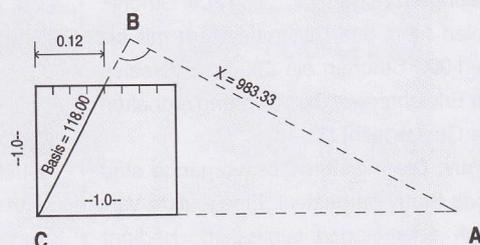


Bild 7: Messvorgang nach Comenius von einer Hilfsbasis aus unter Ansatz fiktiver Gerätefehler

Streckenlänge 13,20 m rechnet sich das Ablesemaß mit 0,0189 m. Der Vergleich der Ablesemaße zeigt deutlich, wie stark sich der minimale Fehler – besonders bei einem kleinen Gerät – auf das Messergebnis auswirkt.

Die Fehleranfälligkeit des Geräts bei der indirekten Bestimmung einer längeren Strecke wurde nachgewiesen. Das führt zu der Frage: Welche Genauigkeit ist mit dem geometrischen Quadrat bei der Stabmessung zu erreichen? Die Analyse hierzu erfolgt unter Ansatz fiktiver Gerätefehler an einer von Comenius (1591–1670) überlieferten Aufgabe (6). Er führt die Messung von einer längeren Hilfsbasis aus durch (Bild 7). Zur Strecke x (= 983,33 m) steckt er rechtwinklig eine Hilfsbasis von 118 m ab und richtet von Punkt C aus das Gerät auf den Punkt A ein (7). Für den Visiervorgang von C nach B rechnet sich das Ablesemaß auf der Skala des Geräts mit

0,12 m. Bei Ansatz eines fiktiven Gerätefehlers von -1 mm und -3 mm ergeben sich die Ablesemaße 0,119 m und 0,117 m. Für x rechnet sich damit jeweils eine Länge von 991,60 m und 1008,55 m. Der Vergleich der beiden Maße mit der Istlänge (= 983,33 m) zeigt für das Verfahren eine Fehlerquote, die für die damalige Zeit noch akzeptabel ist.

Fazit

Es bleibt festzustellen: Das geometrische Quadrat ist für die indirekte Bestimmung einer längeren Strecke nicht geeignet. Die mangelnde Genauigkeit dürfte der Grund sein, dass es nach 1600 – mit Beginn der ersten Triangulationen – fast nur noch als Stabmessgerät in der Literatur erscheint. Die Fehleranalysen sowie die einfacheren Skizzen und Zahlenbeispiele im Schrifttum der Renaissance deuten darauf hin, dass die Autoren für die indirekte Streckenbestimmung nicht Vermessungsanweisungen, sondern eher Lehrbeispiele für den Geometrieunterricht beschreiben und darstellen (8).

Literatur und Anmerkungen

1. Minow, H.: Der Beitrag der Araber zur Entwicklung des Vermessungswesens im Mittelalter. In: Der Vermessungsingenieur 3. 1979. S. 50
2. Apian, P.: Instrument-Buch (Ingolstadt 1533)
3. Schmidt, F.: Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter (Neustadt a. d. Haardt 1935)
4. Die Aufgaben zeigen vielfach die Bestimmung von Turmhöhen und gleichen sich häufig, wie auch die Schriften von Mainardi (1488), Purbach (1516), Fineus (1532), Apian (1533), Rivius (1547), Münster (1551), Hulsius (1604) und Köbel (1616) erkennen lassen.
5. Wunderlich, H.: Das Dresdner „Quadratum geometricum“ aus dem Jahre 1569 von Christoph Schiöbler d. Ä., Augsburg. Veröff. d. Staatl.-Phys. Salons (Dresden). Berlin 1960
6. Minow, H.: Comenius und die praktische Geometrie. Vermessungsingenieur 2/1985. S. 80
7. Der Messvorgang kann analog auch durch Einrichten des Geräts von Punkt C auf Punkt B durchgeführt werden.
8. Mit Viertelkreis und Achsenkreuz zum „Universalgerät“ ergänzt, ist das geometrische Quadrat zusätzlich für die Absteckung von Recht- und Spitzwinkel, als Stabmessgerät sowie als Nivelliergerät einzusetzen. Damit ist das einfach zu bauende Gerät als Lehrmittel für den Geometrieunterricht geeignet.

Autor

Dipl.-Ing. Konrad Peters,
Wiegandweg 63, 48167 Münster