Konrad Peters, Münster

Der Orthogonal-Polygonzug nach Heron

Eine Analyse der Heronschen Aufgabe im Zusammenhang mit der Absteckung des Eupalinostunnels auf Samos*)

1 Herons Vermessungsaufgabe

Heron aus Alexandria (1. Jh. n. Chr.), ein Überlieferer der Meßkunst der Antike, beschreibt im XV. Abschnitt seiner Schrift ‚Dioptra' [1], [2] ein indirektes Meßverfahren, mit dessen Hilfe Länge und Richtung einer Tunnelachse für einen zweiseitigen Stollenvortrieb bestimmt werden kann. Er löste diese Aufgabe mit Hilfe eines Orthogonal-Polygonzuges, der um einen Berg geführt wird. Dabei sind die Rechtwinkel mit dem Winkelmeßgerät Dioptra abzustecken und die Strecken mit einer Meßkette zu messen. Addition und Subtraktion der Strecken ergeben die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse die Tunnelachse bildet. Ihre Länge errechnet sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras. Die Richtung für den zweiseitigen Stollenvortrieb wird festgelegt durch Berechnung und Absteckung von zwei dem großen Dreieck ähnlichen rechtwinkligen Hilfsdreiecken; die Verlängerung ihrer Hypothenuse gibt die Richtung für den Stollenvortrieb in den Berg an. Bild 1 zeigt die auf den Samos-Tunnel bezogene Aufgabe Herons. Sie stellt jedoch den Idealfall dar, also eine Polygonzugmessung ohne Richtungs- und Streckenfehler.

*) Veröffentlichung des VDV-Arbeitskreises „Geschichte des Vermessungswesens".

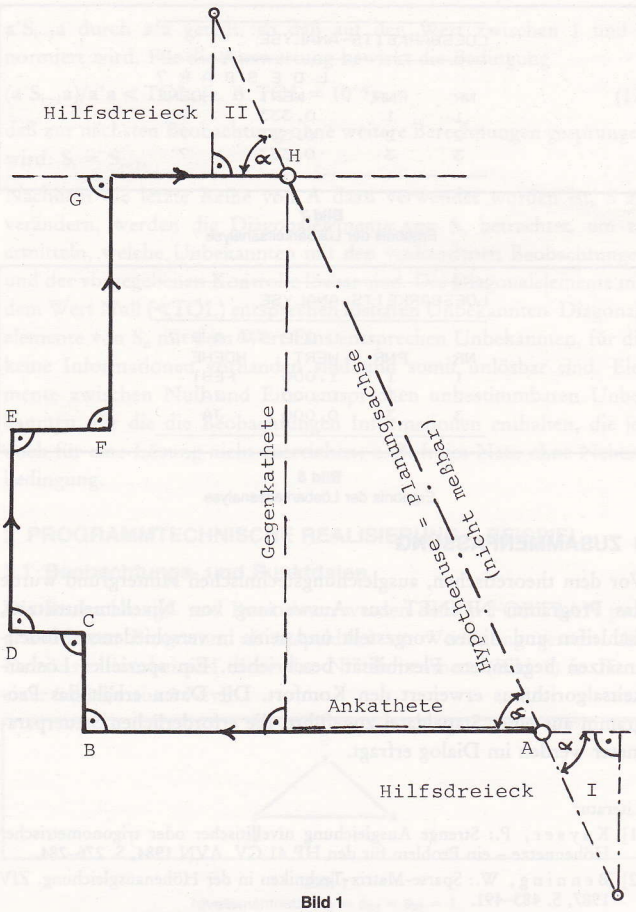

Bild 1
Orthogonal-Polygonzug nach Heron am Beispiel des Samos-Tunnels

2 Bei der Orthogonal-Polygonzugmessung auftretende Fehler

Im Gegensatz zum Idealfall (Bilder 1 und 4 a) ist bei einem Orthogonal-Polygonzug die Streckenmessung und Rechtwinkelabsteckung mit Fehlern behaftet, deren Größe von der Genauigkeit der Meßgeräte, der Meßkunst des Ausführenden sowie der Geländeform abhängen.

Fehler der Streckenmessung durch

- fehlerhafte Meßkette,
- Auswirkungen der Temperatur auf die Länge der Meßkette,
- keine exaktes Loten bei der Messung,
- Durchhängen der schweren Meßkette infolge ihres Eigengewichts.

Fehler der Rechtwinkelabsteckung durch

- ungenau konstruierte Rechtwinkel am Gerät,
- ungenaue Absteckung der Rechtwinkel,
- ungenaue rechtwinklige Aufnahme des letzten Punktes auf die vorhergehende Polygonseite.

3 Auswirkung der Fehler auf die Berechnung und Absteckung der Tunnelachse

Die Polygonzugmessung beginnt im Punkt A und endet im Punkt H (Bild 1). Fehlerhafte Rechtwinkelabsteckungen summieren sich als Richtungsfehler für die letzte Polygonseite HG, die bei fehlerloser Winkelabsteckung parallel zur Anfangsrichtung AB verlaufen müßte. Da auf der letzten Polygonseite vom Punkt H aus das Hilfsdreieck II abgesteckt wird, ist nur dieses Dreieck mit dem Richtungsfehler belastet. Der Fehler aus der Längenmessung wirkt sich in der Berechnung der Hypothenusenlänge (= Tunnelachse) aus und wird ebenfalls bei der Berechnung der beiden Hilfsdreiecke wirksam. Auch die Absteckung der beiden Hilfsdreiecke ist vom Meßvorgang her mit einem Winkel- und Streckenfehler behaftet. Im Gegensatz zum großen Dreieck ist bei den Hilfsdreiecken deren Hypothenuse meßbar und damit eine Prüfung der Absteckung nach dem Lehrsatz des Pythagoras möglich. Die verschiedenen Fehler sind voneinander abhängig. Sie können sich summieren, sich teilweise oder im Idealfall ganz eliminieren.

4 Der Samos-Tunnel und Herons Vermessungsaufgabe

Der im 6. Jh. v. Chr. von Eupalinos gebaute Wasserleitungstunnel auf der griechischen Insel Samos ist eines der bedeutendsten Bauwerke der Antike [3], [4]. Der im zweiseitigen Vortrieb gebaute Tunnel stellt ein Forschungsobjekt dar, das praktisch alle Aufgaben der Ingenieurvermessung umfaßt. Der Tunnel wurde nach seiner Freilegung 1975 neu vermessen. Seitdem sind Aussagen über die Arbeitsweise seines Erbauers möglich, wie eine Reihe von Veröffentlichungen zeigt. So wird u. a. die These vertreten, daß der Tunnel von Eupalinos entsprechend Herons Aufgabenstellung geplant und vermessen wurde. Diese Aussage stützt sich im wesentlichen auf einen Vergleich zwischen der Aufgabe Herons und dem Ergebnis der neuen Tunnelvermessung sowie auf die Topographie des Stadtberges auf Samos. Bisher wurde nicht erkannt, daß die Auswertung der neuen Tunneldaten eine exaktere Analyse der vorhergehend genannten These möglich macht.

Folgende Tunneldaten bilden hierzu die Voraussetzung (Bild 2)

- die von Eupalinos ermittelte Achslänge des Tunnels [5],
- die durch die Neuvermessung festgestellte Achslänge,
- die Richtungsabweichungen von Nord- und Südstollen.

Nach der Vermessung durch Eupalinos beträgt die Länge der Planungsachse 1 030 m. Ein von ihm an der Tunnelwand markiertes Längenmeßsystem, das heute noch teilweise sichtbar ist, ermöglicht diese Feststellung [4]. Die Daten der Neuvermessung [6] geben die tatsächliche Achslänge mit 1 024 m an. Die Richtung des Südstollens trifft in ihrer Verlängerung etwa den Nordeingang, während die des Nordstollens bereits bei 230 m um 2,50 m von der Planungsachse (= Verbindungslinie vom Nord- zum Südeingang) abweicht (Bild 2). Die von Eupalinos zu lang bestimmte Planungsachse sowie die starke Richtungsabweichung des Nordstollens stellen die wichtigen Daten für eine Untersuchung, ob Eupalinos seine Vermessung nach der Aufgabe Herons ausführte.

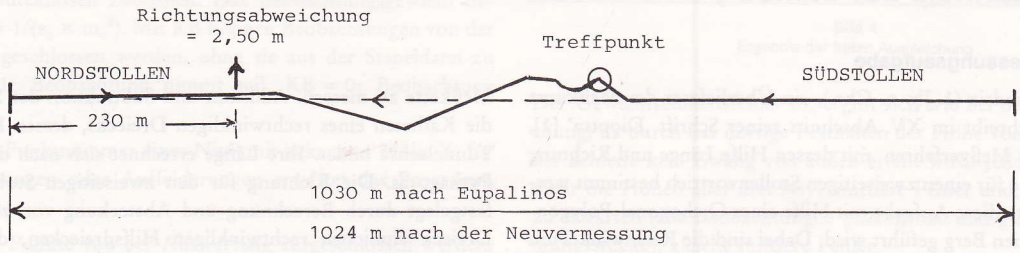

Bild 2
Grundriß des Tunnels.
Die im geraden Vortrieb gebauten Stollenabschnitte sowie die unterschiedlichen Achslängen bilden die Grundlage der Analyse, ob Eupalinos seine Vermessung nach Herons Aufgabe ausführte.

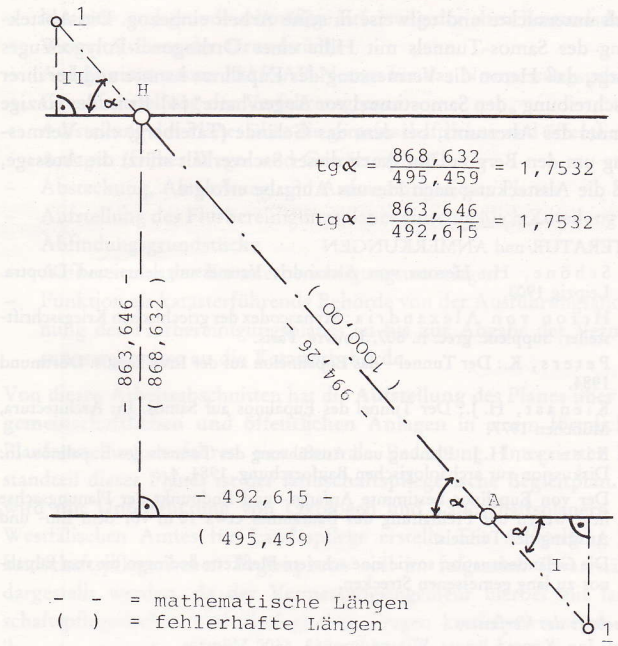

Bild 3
Das Modell zeigt, daß auch bei einem erheblichen Streckenfehler die Winkeltreue der Dreiecke gewahrt bleiben kann.

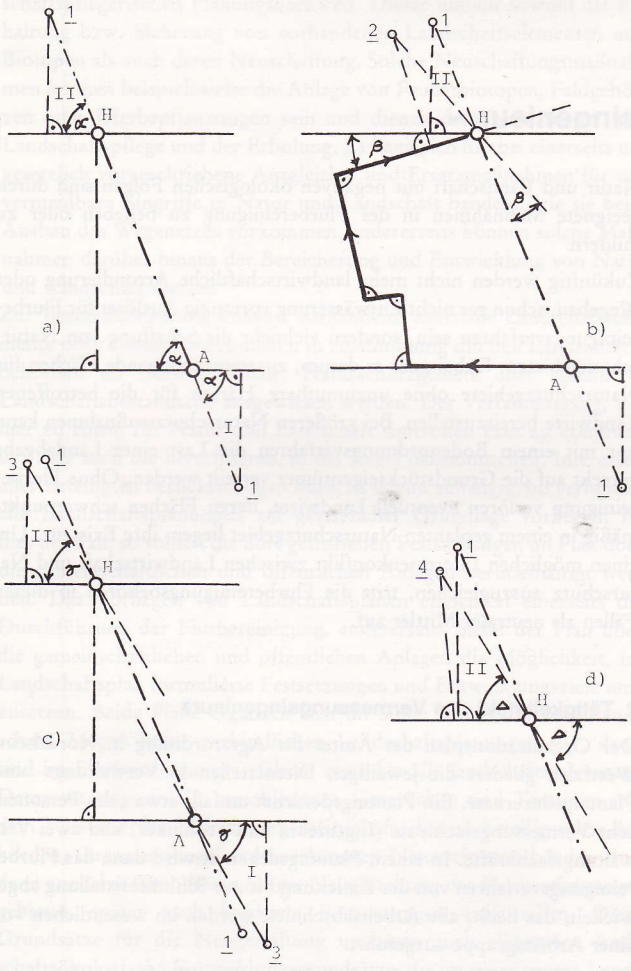

Bild 4
Auswirkung der Winkelfehler bei den einzelnen Meßvorgängen:
a) im Idealfall kein Winkelfehler,
b) durch fehlerhafte Absteckung der Rechtwinkel bei der Polygonzugmessung,
c) bei Berechnung der Hilfsdreiecke, d) bei Absteckung der Hilfsdreiecke.

5 Fehleranalyse mit Hilfe der Tunneldaten

In der Untersuchung werden die bei den einzelnen Meßvorgängen auftretenden Fehler so angesetzt, wie sie jetzt im Tunnel nachzuweisen sind. Eupalinos bestimmte nämlich die Planungsachse um sechs Meter zu lang. Der Fehler resultiert aus den zu lang gemessenen Strecken des Polygonzuges sowie aus der fehlerhaften Absteckung seiner Rechtwinkel, wobei dieser Fehler sich in bezug auf die Längenmessung nur in der letzten Polygonseite auswirkt (Bild 4 b). Beide Fehler gehen in die Kathetenlängen ein und bedingen dadurch die zu große Länge der mit ihrer Hilfe berechneten Planungsachse (= Hypothenuse des großen Dreiecks). Der Streckenfehler belastet beide Katheten, die fehlerhafte Rechtwinkelabsteckung aber nur die Länge der Ankathete [7].

Die dem großen Dreieck ähnlichen Hilfsdreiecke werden ebenfalls mit Hilfe der fehlerbelasteten Katheten des großen Dreiecks berechnet. Die Auswirkung dieses Fehlers auf die Berechnung der Hilfsdreiecke steht jedoch in keinem Verhältnis zum großen Längenfehler der Planungsachse, denn bei einer gleichmäßigen Fehlerbelastung beider Katheten bliebe für diesen Fall die Winkeltreue zum großen Dreieck gewahrt (Bild 3). Diesen Idealfall gibt es in der Praxis nicht (Bild 4 c). Er zeigt jedoch, daß die Berechnung der Katheten der Hilfsdreiecke nicht mit einem ähnlich großen Längenfehler belastet sein muß, wie ihn die Planungsachse aufweist.

Die Fehler aus der Rechtwinkelabsteckung des Polygonzuges wirken sich in der Richtung der letzten Polygonzugseite aus (Bild 4 b). Sie beeinflussen nur die Absteckung des Hilfsdreiecks II und damit die Richtung des Nordstollens, der einen erheblichen Richtungsfehler aufweist. Dieser Sachverhalt deutet auf das Verfahren nach Heron und spricht deutlich gegen ein Meßverfahren mit einer über den Berg gefluchteten Achse, da bei dessen Durchführung Nord- und Südstollen eine einheitliche Richtung aufweisen müßten.

Die Absteckung der beiden gleichgroßen Hilfsdreiecke kann ebenfalls mit Fehlern behaftet sein, die sich aus der Rechtwinkelabsteckung sowie der Absetzung der beiden gerechneten Kathetenlängen herleiten (Bild 4 d). Die Absteckung kann nach dem Lehrsatz des Pythagoras kontrolliert werden. Die für beide Dreiecke gesondert ausgeführte Absteckung bedingt vom Meßvorgang her unterschiedliche Fehler. Sie beeinflussen die Richtung der Planungsachse und können einen anderen Fehler teilweise aufheben oder auch summieren. Die gute Richtung des Südstollens – seine Verlängerung trifft etwa den Nordeingang – zeigt,

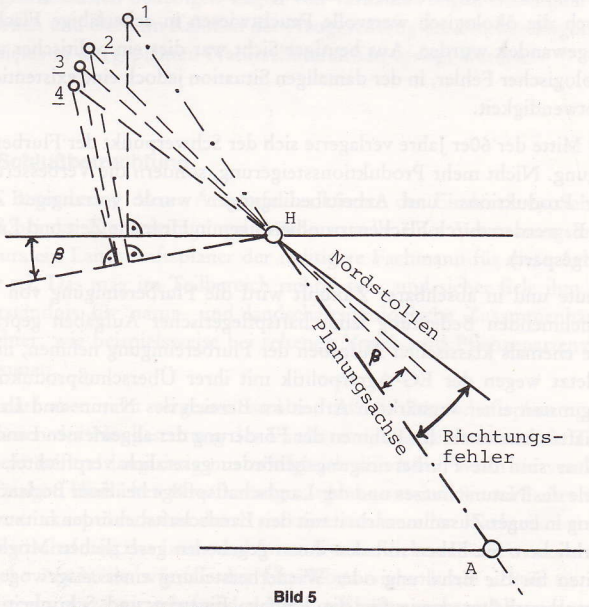

Bild 5
Auswirkung der Winkelfehler für die Richtung des Nordstollens.
Das Bild zeigt den ungünstigsten Fall.

daß sich für das Hilfsdreieck I Berechnungs- und Absteckfehler teilweise aufheben. Die Absteckung des Hilfsdreiecks II erfolgt von der mit dem Richtungsfehler belasteten letzten Polygonseite. Der große Richtungsfehler des Nordstollens deutet darauf hin, daß sich hier Berechnungs- und Absteckfehler zu dem Richtungsfehler summieren (Bild 5).

6 Zusammenfassung

Dargestellt wurde Herons Aufgabe in bezug auf den Samos-Tunnel sowie die bei ihrer Durchführung auftretenden Messungsfehler. In der Fehleranalyse für die einzelnen Meßvorgänge wurden die Fehler jeweils so angesetzt, wie sie der Tunnel aufweist. Die Auswertung der in den Zusammenhang gestellten Fehler gelangte zu der Schlußfolgerung, daß Eupalinos seine Vermessungen entsprechend Herons Aufgabe durchführte. Als Hauptargument gilt die starke Richtungsabweichung des Nordstollens von der Planungsachse; eine Tatsache, die bei einer Absteckung über den Berg auszuschließen wäre. Gegen Herons Verfahren würde eigentlich nur eine bisher nicht erkannte Baumaßnahme sprechen, die die große Richtungsabweichung des Nordstollens bewirkt hätte.

Heron lagen bei der Verfassung des Lehrbuches ‚Dioptra', das noch weitere Vermessungsaufgaben enthält, ältere Schriften vor, die er kritisch untersuchte und teilweise in seine Arbeit einbezog. Die Absteckung des Samos-Tunnels mit Hilfe eines Orthogonal-Polygonzuges belegt, daß Heron die Vermessung des Eupalinos kannte und bei ihrer Beschreibung „den Samostunnel vor Augen hatte" [4]. Er ist der einzige Tunnel des Altertums, bei dem das Gelände (Tafelberg) eine Vermessung um den Berg zuläßt. Auch dieser Sachverhalt stützt die Aussage, daß die Absteckung nach Herons Aufgabe erfolgte.

LITERATUR und ANMERKUNGEN

[1] Schöne, H.: Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. Leipzig 1903.

[2] Heron von Alexandria: Mynascodex der griechischen Kriegsschriftsteller. Supplem. grec. n. 607. Louvre, Paris.

[3] Peters, K.: Der Tunnel – das Eupalineion auf der Insel Samos. Dortmund 1984.

[4] Kienast, H. J.: Der Tunnel des Eupalinos auf Samos. In: Architectura, München 1977.

[5] Kienast, H. J.: Planung und Ausführung des Tunnels des Eupalinos. In: Diskussion zur archäologischen Bauforschung. 1984, 4.

[6] Der von Eupalinos bestimmte Anfangs- und Endpunkt der Planungsachse liegt wegen der Freihaltung des Bauraumes etwa 10 m vor dem Ein- und Ausgang des Tunnels.

[7] Die Geländesituation sowie eine schwere Meßkette bedingen die von Eupalinos zu lang gemessenen Strecken.

Anschrift des Verfassers
Dipl.-Ing. Konrad Peters, Wiegandweg 63, 4400 Münster.